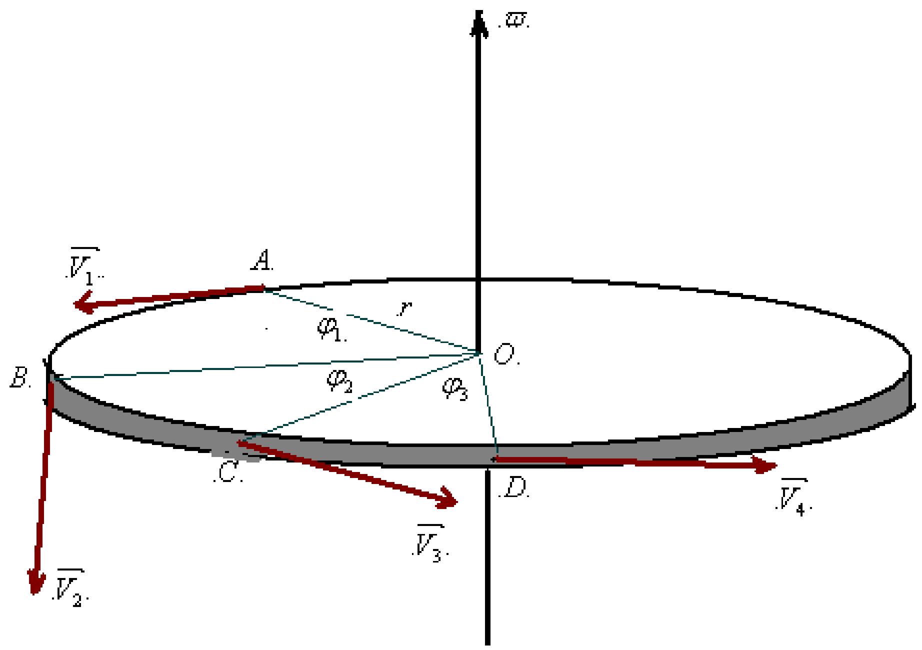
Conceptos previos

TEMAS:MOVIMIENTO CIRCULAR VARIADO.
MOMENTO DE INERCIA.
MOMENTO CINETICO O ANGULAR.
IMPULSO ANGULAR.

MOVIMIENTO CIRCULAR VARIADO: Una partícula “m” se mueve con movimiento circular uniforme cuando su velocidad angular “W” es constante. Por lo tanto, al moverse sobre una circunferencia de radio R, recorre arcos iguales en tiempos iguales y el radio vector correspondiente describe ángulos iguales en tiempos iguales. Es decir, considerando la figura:



Los arcos: AB=BC=CD y los ángulos: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \ldots$, lo que implica que:

a) **rapidez constante :** $V_1 = V_2 = V_3$**…..(modulo de la velocidad es constante** $= \left|\vec{V}\right|$**)**

b) **velocidad angular constante:** $\overrightarrow{\varpi_1} = \overrightarrow{\varpi_2} = \overrightarrow{\varpi_3}$ **.**

Luego en el movimiento circular uniforme tanto la rapidez tangencial como la velocidad angular son constantes.

Pero si la partícula se mueve de modo que varíe tanto su rapidez tangencial como su velocidad angular, el movimiento es variado. Cuando esta variación es constante, o sea, es la misma en el mismo intervalo de tiempo, el movimiento se llama **UNIFORMEMENTE VARIADO**.

Supongamos Para la siguiente figura que el intervalo de tiempo entre A y B, B y C, C y D y D y E es el mismo,

Con lo cual podemos escribir:
Arcos : AB<BC<CD<DE
Ángulos: $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$
Rapideces: $V_1 < V_2 < V_3 < V_4$
Veloc. Angular: $W_1 < W_2 < W_3 < W_4$

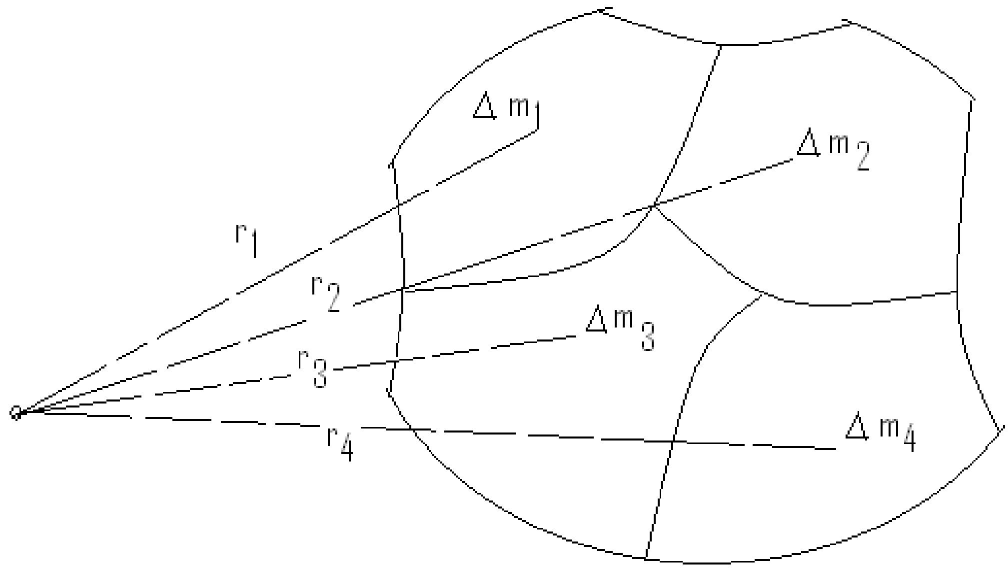
Además.

TORCA O MOMENTO DE TORSION. Debido a una fuerza ejercida alrededor de un eje, es la medida de la efectividad de la fuerza para que esta produzca una de rotación alrededor de un eje.

La torca se define operacionalmente como:
Torca = $r \times F sen\theta$, donde r es la distancia radial desde el eje al punto de aplicación de la fuerza y θ es el Angulo agudo entre las direcciones de r y F.

EL MOMENTO DE INERCIA (I) de un cuerpo **es la medida de la inercia rotacional de este** .Si un objeto que puede girar libremente alrededor de un eje presenta gran dificultad para hacerlo girar, se dice que su momento de inercia alrededor de ese eje es grande. Un objeto con I pequeña tiene poca inercia rotacional.

Si un objeto se considera constituido por masas pequeñísimas :m_1, m_2, m_3 …., a las distancias respectivas $r_1, r_2, r_3 \ldots$, a partir de un eje, su momento de inercia a partir de ese eje es:
Si en vez de una partícula, como se supone para la relación anterior, se tiene un solidó rígido formado por “n” partículas, se aplica la relación anterior a cada una de ellas y se suman los resultados lo que dará el momento de inercia del cuerpo. Así obtenemos sucesivamente.



$$+\left\{\begin{array}{l} i_1 = \Delta m_{1\times} r_1^{\ 2} \\ i_2 = \Delta m_{2\times} r_2^{\ 2} \\ . \\ . \\ . \\ i_n = \Delta m_{n\times} r_n^{\ 2} \end{array}\right.$$

$i_1 = \Delta m_{1\times} r_1^{\ 2}$

$i_2 = \Delta m_{2\times} r_2^{\ 2}$

.

.

.

$i_n = \Delta m_{n\times} r_n^{\ 2}$

Io= $i_1 = \Delta m_{1\times} r_1^{\ 2} + i_1 = \Delta m_{1\times} r_1^{\ 2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + i_n = \Delta m_{n\times} r_n^{\ 2}$

Esto puede escribirse como una sumatoria:

$$\textbf{Io=} \sum_{k=1}^{n} m_k \times r_k^{\ 2}$$

La determinación algebraica del momento de inercia Io de un cuerpo es un problema de cálculo integral: se supone el cuerpo dividido en corpúsculos infinitesimales "dm" obteniéndose.

Io= $\int_a^b r^2 dm$

Cuando el cuerpo tiene forma regular como un alambre , varilla , disco , anillo , esfera , etc. No es difícil calcular esta integral , pues basta encontrar una expresión que de r=f(m) .

Aquí, T, I y α , están calculadas con respecto al mismo eje. En relación a las unidades, T esta dada en N.m, I en kg.m ^{2} y α debe darse en $\frac{rad}{s^2}$

I=m $_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ... = \sum m_i r_i^2$

Las unidades son kg.m ^{2}

Es conveniente definir un radio de giro (k) para un objeto alrededor de un eje por la relación**: I=Mk** ^{2} , donde M es la masa total del objeto. En consecuencia K es la distancia a la cual se debe colocar una masa puntual M, si la masa va a tener la misma I que tiene el cuerpo real.

TORCA Y ACELERACION ANGULAR, Una torca no balanceada T, actuando Sobre un cuerpo de de momento de inercia I, produce una aceleración angular α , dada por:

T= $(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ...m_n r_n{}^2)\alpha =$

De donde:

T=I α

Esta ecuación es fundamental en las rotaciones de sólidos rígidos en torno a un determinado eje. Si la comparamos con la formula F=a.m., que es fundamental en las traslaciones, se ve que hay una gran analogía. En efecto, la fuerza F que produce la traslación del cuerpo se corresponde con el troqué T que produce la rotación; la masa inercial “m” con el momento de inercia Io y la aceleración lineal “a” con la aceleración angular α

En las traslaciones la razón entre la fuerza F aplicada al cuerpo y la aceleración “a” que adquiere, se llama masa inercial “m= $\frac{F}{a}$ **” .** A su vez en las rotaciones, la razón entre el troqué T y la aceleración angular α que se origina en el cuerpo se llama momento de inercia Io= $\frac{M}{\alpha}$ basta cambiar el eje a la mitad para que el momento de inercia sea diferente: Io= $\frac{1}{12} mL^2$

La formula $\alpha = \frac{T}{Io}$, hace ver que la aceleración angular α es inversamente proporcional al momento de inercia Io . Por lo tanto al aplicar un determinado torque T, este producirá una menor aceleración angular mientras mayor sea el momento de inercia. Por esta razón el momento de inercia representa en las rotaciones la resistencia que oponen los cuerpos a variar su velocidad angular, es decir una resistencia a adquirir una aceleración angular.

El momento de inercia en las rotaciones representa el mismo papel que la masa inercial en las traslaciones. En muchas maquinas industriales es necesario emplear "volantes" de gran momento de inercia con el objeto de mantener la velocidad angular.

Aquí, T, I y α , están calculadas con respecto al mismo eje. En relación a las unidades, T esta dada en N.m , I en kg.m^2 y α debe darse en $\frac{rad}{s^2}$

ENERGIA CINETICA DE ROTACION: (ECr) de una masa cuyo momento de inercia alrededor de un eje es I y se encuentra rotando alrededor de un eje con una velocidad angular ϖ , es:

ECr=$\frac{1}{2} I\varpi^2$, donde la energía cinética rotacional esta en Joules y su velocidad angular ϖ , debe darse en: $\frac{rad}{s}$

ROTACION Y TRASLACION COMBINADAS: La energía cinética de una pelota que rueda, o de otro objeto de masa M que rueda es la suma de:

1.- Su energía cinética rotacional ECr alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, y

2.- La energía cinética trasnacional EC, de una masa puntual equivalente que se mueve con el centro de masa .Expresado en una formula:

EC total=$\frac{1}{2} I\varpi^2 + \frac{1}{2} Mv^2$

Nótese que I es el momento de inercia del objeto respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa.

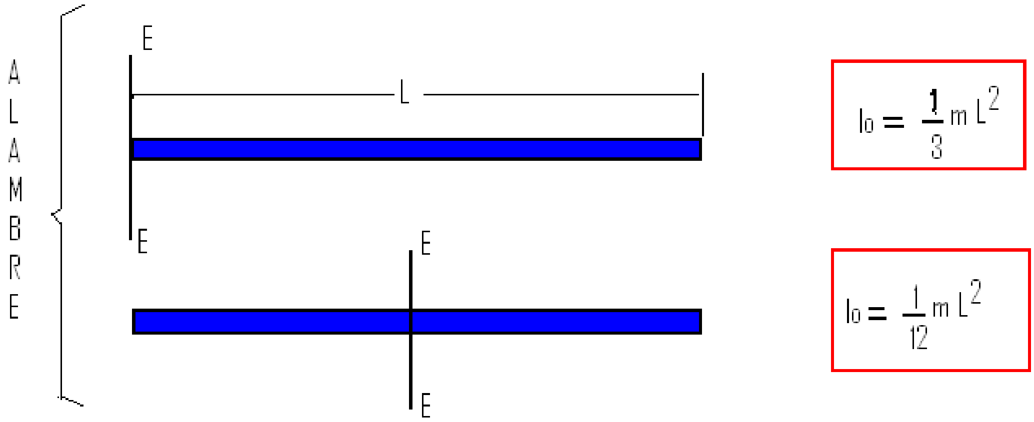
EL TRABAJO (W) efectuado sobre un cuerpo rodando durante un desplazamiento angular θ por una torca T constante, esta dado por:

W=T$\times\theta$, donde W esta dado en joule y θ en radianes.

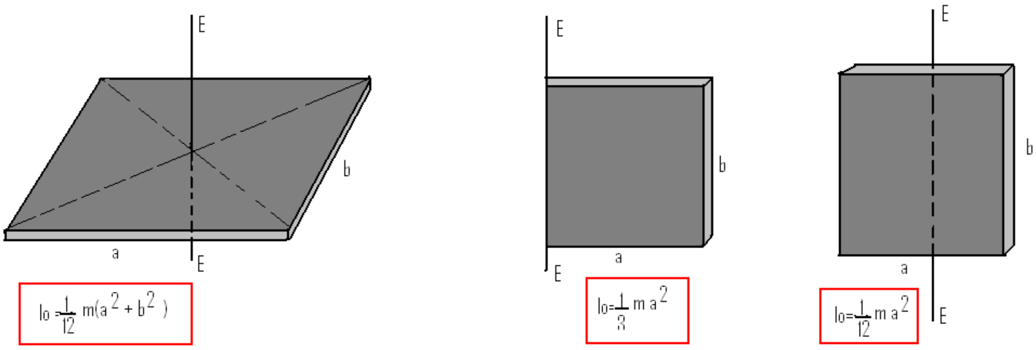
MOMENTO DE INERCIA DE CUERPOR HOMOGENEOS Y REGULARES.

Con EE se indica el eje de rotación.

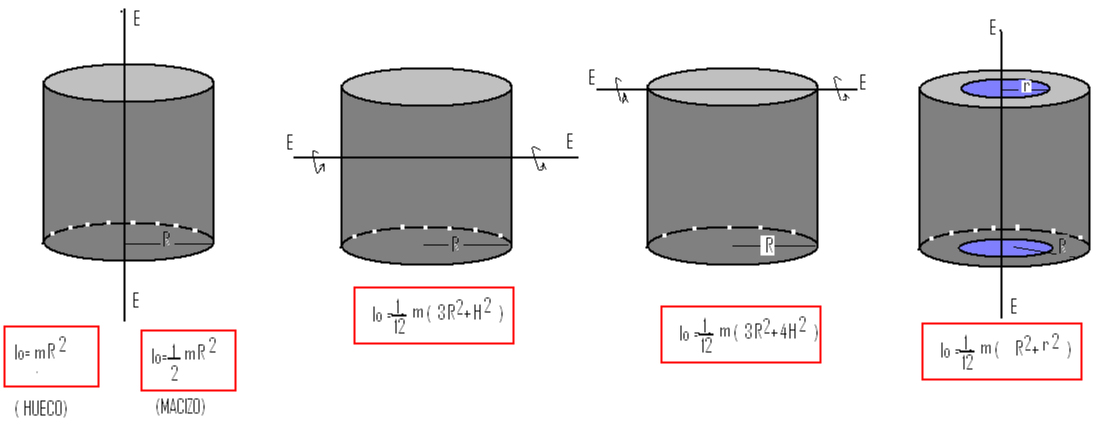
ALAMBRE RECTO DE LARGO L



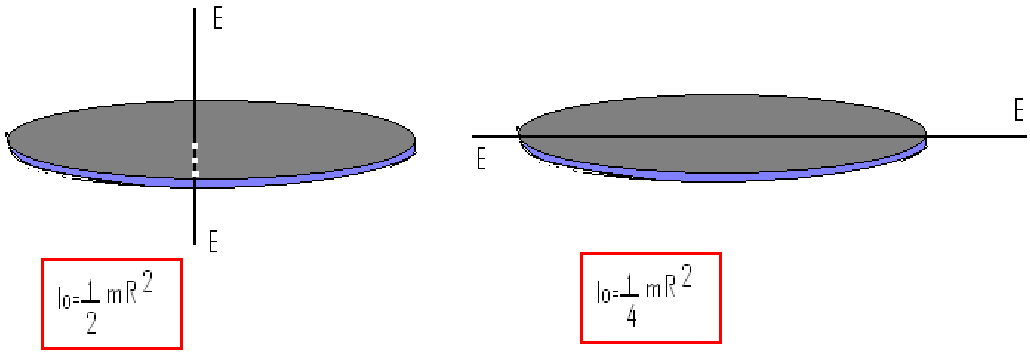
LAMINA RECTANGULAR DELGADA



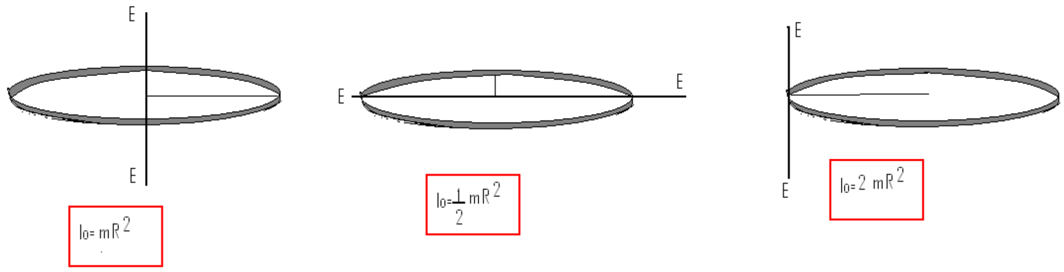
CILINDRO RECTO.



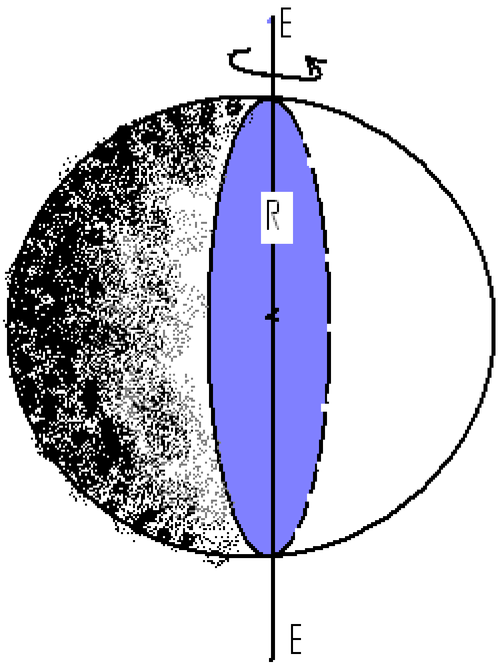
DISCO DELGADO.



ANILLO O ARO.



ESFERA.

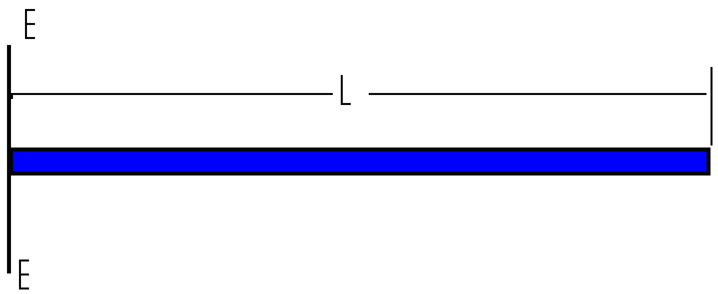


$$I_0=\frac{2}{5}mR^2$$ MACIZA

$$I_0=\frac{2}{3}mR^2$$ HUECA

DEMOSTRACIONES DE ALGUNAS DE ESTAS FORMULAS.
En las cuales basta con calcular la integral.

Consideremos un alambre delgado de largo L y masa m como indica la fig.



Se calcula primeramente el momento de inercia de una partícula infinitesimal de longitud “dr” del alambre situada a la distancia “r” del eje. Siendo “m” la masa total del alambre de largo “L” , su masa por unidad de longitud es m/L . Entonces la mas del elemento infinitesimal “dr” será un infinitésimo de masa que vale dm=$\frac{m}{L}dr$

Por lo tanto, el momento de inercia de esta masa infinitesimal respecto de EE es:

$$dIo=(\frac{m}{L}dr)r^2 \quad \text{, o bien : } dIo=\frac{m}{L}r^2dr$$

Ahora para calcular el momento de inercia de todo el alambre hay que sumar los momentos de inercia de todas las masas infinitesimales de largo dr que se extienden desde r =0 hasta r =L

Es decir hay que calcular la integral:

Io= $\int_0^L \frac{m}{L} r^2 dr$, se obtiene sucesivamente:

Io= $\frac{m}{L}\int_0^L r^2 dr = \frac{m}{L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{m}{L}\left[\frac{L}{3} - \frac{0}{3}\right]$, de donde:

Io= $\frac{1}{3} mL^2$

ANALOGIA ENTRE CANTIDADES LINEALES Y ANGULARES.

DESPLAZAMIENTO LINEAL d / DESPLAZAMIENTO ANGULAR θ
RAPIDEZ LINEAL V / RAPIDEZ ANGULAR W
ACELERACION LINEAL A/ ACELERACION ANGULAR α
MASA INERCIAL m/ MOMENTO DE INERCIA Io
FUERZA F / TORCA T
CANTIDAD DE MOV. LINEAL Mv / CANT. DE MOV. ANGULAR Io
W
IMPULSO LINEAL Ft / IMPULSO ANGULAR Tt

Si en las ecuaciones de movimiento lineal se reemplazan las cantidades lineales por las cantidades angulares correspondientes, se obtendrán las ecuaciones de movimiento angular correspondientes. Así pues, tenemos

LINEAL F=ma Ec = $\frac{1}{2}mv^2$ **Trabajo=Fd Potencia=Fv**

ANGULAR T=Iα **Ec=** $\frac{1}{2}Iw^2$ **Trabajo = T**θ **Potencia = Tw**

EJERCICIOS DE APLICACION:

1.- Una rueda de 6 Kg. de masa y de radio de giro de 40 cm. esta rodando a 300 rpm. Determine:
1.1.- Su momento de inercia.
1.2.- Su energía cinética rotacional.
(0.96kg.m ^{2} , 473 J)

2.- Una esfera uniforme de 500gr. Y 7 cm. de radio gira a 30 rev/s a través de un eje que pasa por su centro .Calcule:
2.1.- Energía cinética rotacional.
2.2.- Su cantidad de movimiento angular.
2.3.- Su radio de giro.

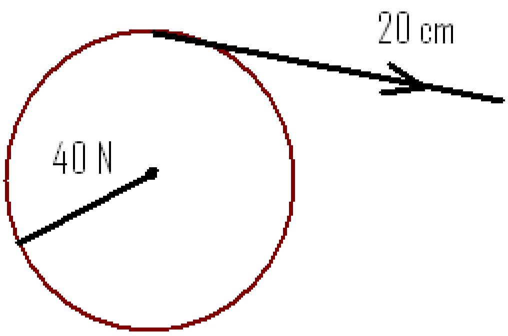
(17.3 J , 0,184 kg $\frac{m^2}{s}$, 0,0443 m)

3.- Una hélice de avión tiene una masa de 70 Kg. y un radio de giro de 75 cm. Encuentre:
3.1.- Su momento de inercia.
3.2.- La magnitud de la torca no equilibrada que se necesita para darle una aceleración angular de $4\frac{rev}{s^2}$

(39kg.m^2 , $8\pi rad/s^2$)

4.- En la fig. la fuerza es constante de 40 N y se aplica tangencialmente al perímetro de una rueda de 20 cm. de radio. La rueda tiene un momento de inercia de 30kg.m^2 .Encuentre:
4.1.- La aceleración angular.
4.2.- La rapidez angular después de 4 s, si parte del reposo.
4.3.- El numero de revoluciones realizadas en 4 s.
4.4.- Demuéstrese que el trabajo realizado sobre la rueda en los 4 s es igual a la energía cinética rotacional de la rueda al cabo de los 4 s.

(0.267 rad/s^2..,..1.07rad/s..,..0,34rev..,..17,1J)



5.- la rueda de un molino es un disco uniforme de 0.9 kg. y de 8 cm. de radio .Se lleva uniformemente al reposo desde una rapidez de 1400 rpm en un tiempo de 35 s .¿De que magnitud es la torca debido al rozamiento que se opone al movimiento?

(0.0121 N.m)

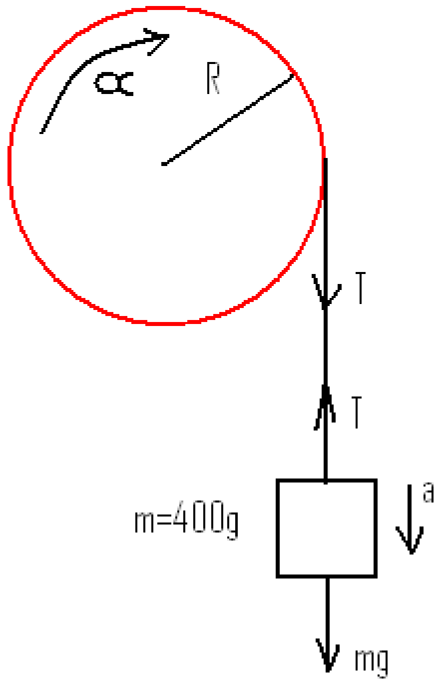
6.- repítase el problema anterior utilizando la relación entre trabajo y energía.

7.- Un volante tiene un momento de inercia de 3.8 kg.m^2 .¿Que torca no balanceada y constante se requiere para incrementar su rapidez de 2rev/s a 5rev/s en 6 revoluciones?

(41.8 N.m)

8.- como se muestra en la fig. ,una masa de m=400 gr. Cuelga del perímetro de una rueda de radio 15 cm. Cuando se suelta desde el reposo, la masa cae 2m en 6.5 s .Determine el momento de inercia de la rueda.

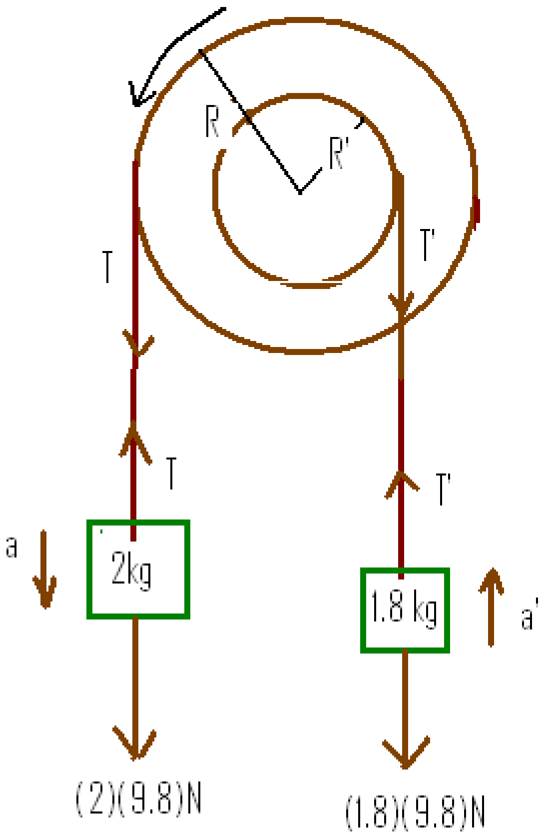
(0.92 $kg.m^2$)



9.- repita el problema anterior, haciendo consideraciones de energía

10.- El momento de inercia del sistema de poleas mostrado en la fig. es $I=1.70kg.m^2$, mientras que R= 50 cm. Y R'=20cm. Encuentre la aceleración angular del sistema de poleas y las tensiones T y T'

($2.76\ rad/s^2$, T=16.8 N y T'= 18.6 N)



11.- Utilice el método de energía para calcular la rapidez de la masa de 2kg. De la Fig. Anterior cuando ha caído 1.5 m desde el reposo .Utilice los mismo valores que en el problema anterior para I, R y R'

12.- Un motor gira 20 rev/s y suministra una torca de 75 N .m .¿Cual es la potencia en HP que esta desarrollando?

(12.6 HP)

13.-una rueda motriz que acciona una banda de transmisión conectada a un motor eléctrico que tiene un diámetro de 38 cm. y realiza 1200 rpm .La tensión en la banda es de 130 N en el lado flojo y 600 N en el lado tenso. Encuéntrese la potencia , en Hp , que transmite la rueda a la banda.

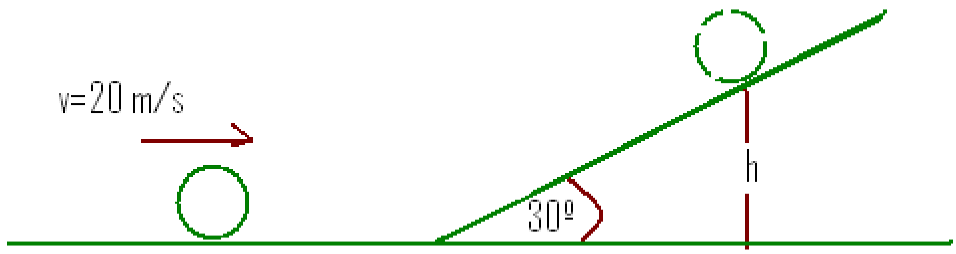
(15 Hp)

14.- un motor de 0.75 Hp actúa durante 8 s sobre una rueda que inicialmente esta en reposo y que tiene un momento de inercia de 2 kg.m^2 .Encuéntrese la rapidez que desarrolla la rueda, considerando que no hay perdidas.

(67 rad/s)

15.- Como indica la fig. una esfera sólida uniforme rueda sobre una superficie horizontal a 20 m/s .Después rueda hacia arriba sobre un plano inclinado , como se muestra .Si las perdidas debida a la fricción son despreciables .¿Cual será el valor de H en el lugar donde se detiene momentáneamente la esfera?.

(28.6 m)



16.- Inicialmente en reposo, un anillo de 20 cm. de radio rueda hacia debajo de una colina hasta un punto que se encuentra 5 m por debajo del punto inicial .¿Que tan rapidez esta rodando en ese punto?

(35 rad/s)

17.- Un disco solidó rueda sobre una pista, en la parte mas alta de una colina su rapidez es de 80 cm/s .Si las perdidas por fricción son despreciables. ¿Con que rapidez se estará moviendo cuando se encuentra a 18 cm. por debajo de la cima?

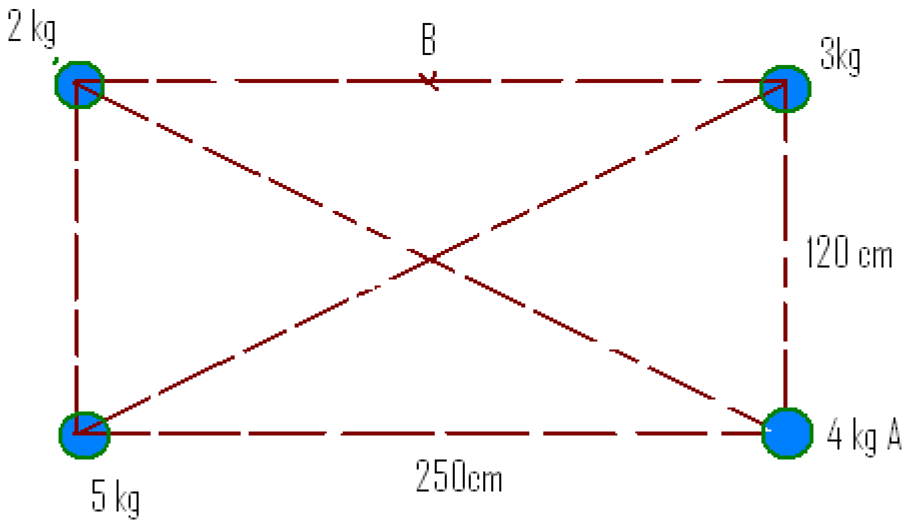
(1.73 m/s)

18.- Determine el momento de inercia de las cuatro masas mostradas en la fig. , relativo a un eje perpendicular a la Pág. Y que pase a través de:

18.1.- El punto A.

18.2.- El punto B.

(26.9 kg.m^2 , 33.3 kg.m^2 9

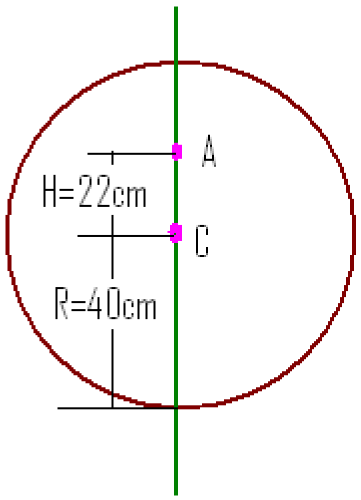


19.- El disco uniforme que se muestra en la Fig., tiene una masa de 6.5 kg. y un diámetro de 80 cm. .Calcule el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la Pág. Que pase a través de:

19.1.- G

19.2.- A

(0.52 kg.m^2 , 0.83 kg.m^2)

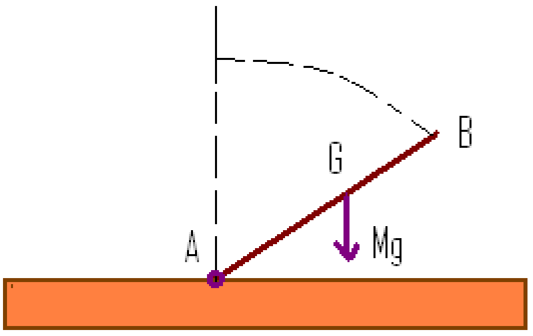


20.- Un enorme rodillo uniforme en forma de cilindro es jalado por un tractor para compactar la tierra .Este rodillo tiene 1.80 m de diámetro y un peso de 10 kN .Si los efectos de la fricción son despreciables. ¿Que potencia promedio en Hp , debe tener el tractor para acelerar desde el reposo hasta una rapidez de 4 m/s en una distancia de 3 m?

(10.9 Hp)

21.- Como se muestra en la fig. una varilla delgada AB de masa M y longitud L esta sujeta por una bisagra colocada en el piso en su extremo A .Si inicialmente esta vertical y comienza a caer hacia el piso como se muestra. ¿Con que rapidez angular llegara a golpear el piso?

($\sqrt{\frac{3g}{L}}$)



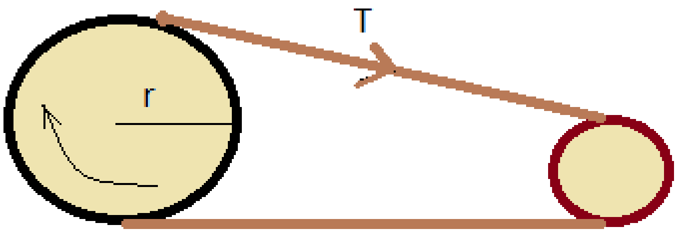
22.- Un hombre se encuentra sobre una plataforma con libertad de girar , su rapidez es de 0.80 rev/s con ambos brazos extendidos horizontalmente ,pero cuando los contrae hacia su rapidez de giro es de 0.25 rev/s , .Encuentre la relación de su momento de inercia en el primer caso con respecto al segundo.

(3.29

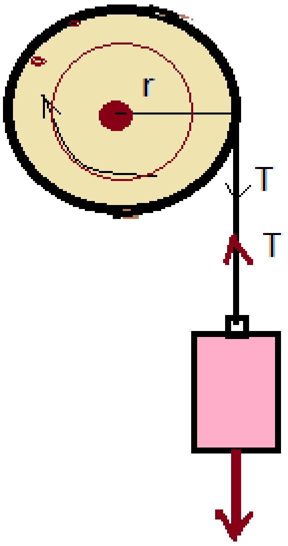
23.- Calcule la energía cinética rotacional de la Tierra debida a su rotación diaria. Suponga que es una esfera uniforme con una masa de de 5,98x$10^{24}kg$ y radio R=6,37$x10^{6}$m.
(9,71$x10^{37}$)

24.-Una rueda de 40cm de radio tiene una masa de 30kg y radio de giro de 25cm. Una cuerda enrollada del perímetro suministra una fuerza tangencial de 1,8N a la rueda, la cual gira libremente sobre un eje que pasa por el centro. Calcule la aceleración angular de la rueda.
(0,38)

25.- La rueda mayor de la figura, tiene una masa de 80 kg. Y radio de 25 cm. Se impulsa por medio de una banda, como se ilustra en la fig. La tensión en la parte superior de la banda es de 8N y la existente en la parte inferior es en esencia cero.
¿Cuánto tarda la banda en acelerar la rueda mayor desde el reposo a una rapidez angular de 2 rev/s^2
¿Cuánto gira la rueda en ese lapso
¿Cuál es el trabajo realizado por la banda sobre la rueda. Suponga que la rueda es un disco uniforme.
(99 rad , 200J)

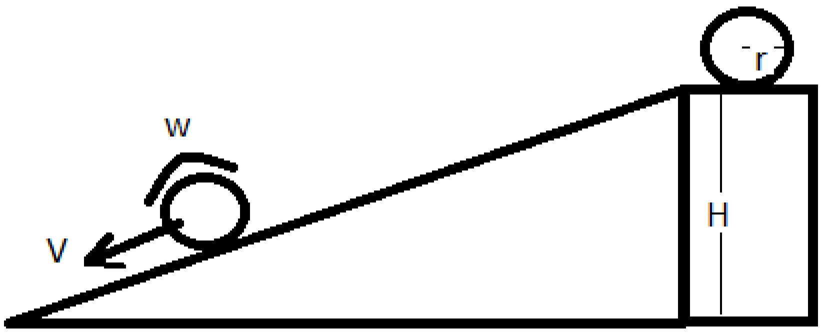


26.-El bloque de 3 kg de la figura, cuelga de una cuerda enrollada en una rueda de 40kg. La rueda tiene un radio de 0,750m y radio de giro de 0,6 m . Calcule:
La aceleración angular de la rueda
La distancia que cae el bloque en los primeros 10 seg después de liberarlo.
(1,03/seg.seg , 51,5 m))



27.-Para el problema anterior, calcule la velocidad angular de la rueda, después de que el bloque ha caído 80 cm. use los aspectos energéticos y suponga que no hay fricción.
(1,71 rad/s)

28.-Una esfera uniforme de radio r y de masa m parte del reposo en la parte superior de un plano inclinado de altura h , y luego rueda hacia abajo. ¿Cuan rápido se mueve la esfera cuando llega hasta abajo?(suponga que rueda con suavidad y que las pérdidas por la energía de fricción son despreciables)
(10/7 gh,)



29.-Suponga que tres cuerpos uniformes de igual masa m y radio r están en reposo en la cima de una colina, a una altura h del fondo. Un cuerpo es una esfera, otro es un aro y el tercero es un disco solido. Los tres objetos ruedan por la colina al mismo tiempo, sin deslizarse. ¿Cuál es el primero en llegar hasta abajo?
¿Cuál es la ecuación general que muestra el efecto de los momentos de inercia.
(La esfera, I= 1,43gh)

30.-Se aplica una fuerza de 6N a una cuerda enrollada alrededor de una rueda de 9cm de radio. ¿Cuál es el trabajo que realiza esta fuerza al girar la rueda 36°?
(0,339J)

31.-El momento de fuerza de fricción sobre cierto sistema eje-rueda es de 0,060N.m .¿Cuanto trabajo efectúa este momento de fuerza sobre el sistema cuando la rueda gira cuatro vueltas completas.
(
32.-Cuanto trabajo debe aplicarse a una rueda que tiene momento de inercia I= 0,4 kg.m^2 para acelerar desde el reposo a un valor de la velocidad angular de 1|50 rev/min
(49,3J)

33.-El torno de un alfarero tiene un momento de inercia de 1,5 kg.m^2 y gira 36 rev/min cuando se permite que gire libremente hasta detenerse ¿Cuánto trabajo ejercen las fuerza de fricción para detener la rueda?

34.-Un plato fonográfico con momento de inercia de 0,0015 kg.m^2 gira a 45 rev/min Cuanto trabajo realizan las fuerza de fricción para detener el plato cuando se desconecta el aparato
Cual es el momento de fuerza medio que ejercen las fuerzas de fricción si la rueda tarda 25s en detenerse?
(0,0167 J , 0,000283Nm)

35.- Calcule la energía de rotación, traslación y la suma de ambas, del electrón en el átomo de hidrógeno (desprecie las fuerza gravitatorias en el átomo y solo considere la fuerza de tipo electrostática)